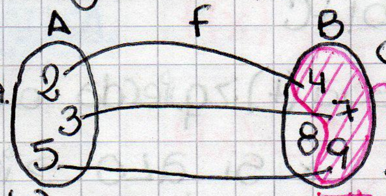
Análisis Matemático. CBC 2012

Resumen de las clases de Carlos Fuentes y Nora

Función

diagrama de Venn.



*Dm natural: dominio posible más grande.

conjunto de partida. * Dm ·variable independiente (x)

conjunto de llegada. conjunto imagen. Cd. ·variable dependiente (y)

Im

- 4 es la imagen de 2.
- 2 es una preimagen de 4.

·Subconjunto del Cd, elementos del Cd que están relacionados con el Dm.

$\in$ Pertenece
/ tal que

$C_0 = \{x \in Dmf \,/\, f(x) = 0\}$

$C^+ = \{x \in Dmf \,/\, f(x) > 0\}$ $\qquad C^- = \{x \in Dmf \,/\, f(x) < 0\}$

Monotonía: estudio de crecimiento y decrecimiento de una función.

$I\nearrow: \ f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$

$I\searrow: \ f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$

- Fc monótona = Fc estrictamente creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fc creciente: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Extremos: Puntos donde cambia el crecimiento de la función:

-máximo } -local o relativo.
-mínimo } -absoluto.

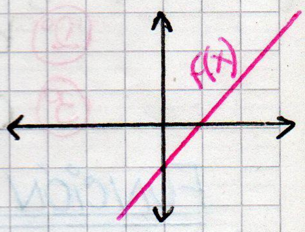
*Punto máximo: $(x;y)$

*Valor máximo: y

Función Lineal

$y = mx + b$

$f(x) = x - 1$



$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

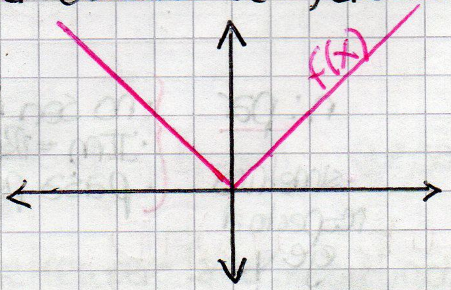
- Si son $\parallel \Leftrightarrow m_1 = m_2$
- Si son $\perp \Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1$

$$y = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) + y_0$$

Función Módulo

$|x|$ módulo o valor absoluto de x, distancia de x al 0.

$|x| = \sqrt{x^2}$



$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$f(x) = a.|x+b| + c$ $\qquad f(x) = |x|$

$\boxed{\Leftrightarrow \text{Si solo si}}$

Propiedades de inecuaciones con módulo. $\begin{cases} |A| < r \iff -r < A < r, & \text{con } r > 0 \\ |A| > r \iff A > r \text{ ó } A < -r, & \text{con } r > 0 \end{cases}$

En general: $F(x) = a.|x+b| + C$

- b ⇒ siempre traslada hacia (+) izquierda o (-) derecha.
- a ⇒ modifica amplitud:
  - * si $a < 0$ → invierte el gráfico.
  - * si $-1 < a < 1$ → tiene amplitud mayor.
  - * si $a > 1$ o $a < -1$ → tiene menor amplitud.
- c ⇒ siempre traslada hacia (+) arriba o (-) abajo.

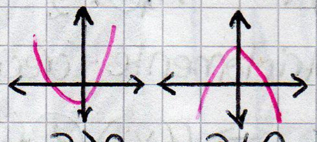
Función Cuadrática

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ → Forma polinómica. * $a \in \mathbb{R} \neq 0$
- $f(x) = a(x - x_v)^2 + Y_v$ → Forma canónica.
- $f(x) = a.(x - x_1)(x - x_2)$ → Forma factorizada.

$X_v = \frac{-B}{2A} \rightarrow Y_v = F(X_v)$ F.R: $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = X_{1,2}$

Δ → $\Delta > 0$ ⇒ 2 raíces.
→ $\Delta < 0$ ⇒ ninguna raíz.
→ $\Delta = 0$ ⇒ única raíz.

- Gráfica: parábola.
- Simétrica: $X_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$



$a > 0$ cóncava. $a < 0$ convexa.

En genera: $f(x) = a(x+b)^2 + c$

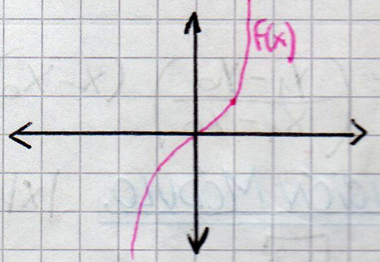
1° a → invierte parábola si (-). $a > 0$ ↕, $a < 0$ ↕ y modifica amplitud.
2° b → traslada hacia (+) izquierda o (-) derecha.
3° c → desplaza hacia (+) arriba o (-) abajo.

Función Potencial $f(x) = x^n$

$n \in \mathbb{R}$
$n \geq 3$

n: impar
- Simétrica respecto al origen.

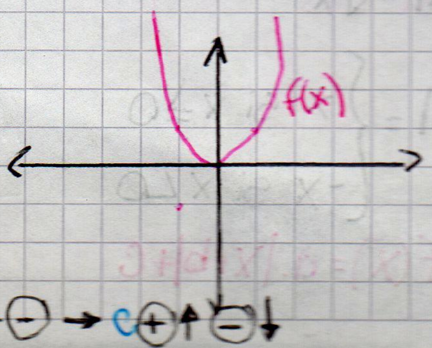
{ · monótona.
· Im: $\mathbb{R}$
· Pasa por (0;0)
· Una raíz



$f(x) = x^3$

n: par
- simétrica respecto al eje y.

{ · no son monótonas.
· Im = $\mathbb{R} \geq 0$
· pasa por (0;0)



$f(x) = x^4$

* $F(x) = a.(x-b)^n + C$

Teoría del conocimiento. A amplitud, sentido B (+)← (-)→ C (+)↑ (-)↓

Función Homográfica.

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ → Forma Racional.

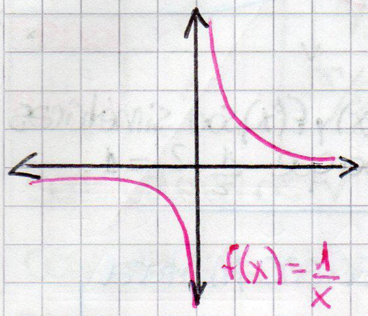
$\ast\ x^n \to n = 1$

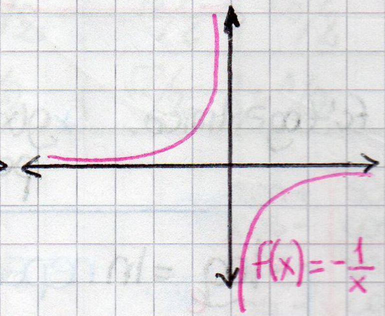
$f(x) = \frac{r}{x+p} + q$ → Forma canónica.

r amplitud, sentido.

p (+) izq. (-) derecha

q (+) arriba. (-) abajo.





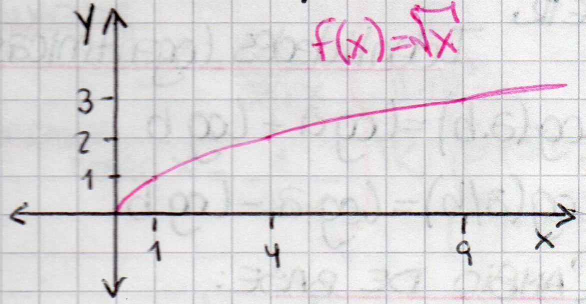
Función Raiz Cuadrada (o raíz de índice par)

$f(x) = a\sqrt{x+b} + c$

a amplitud, sentido

b (+) izquierda, (-) derecha.

c (+) arriba, (-) abajo



Clasificación.

- inyectiva: No existen dos valores de x con la misma imagen.
- sobreyectiva, subyectiva, suryectiva: Cualquier valor de y tiene pre-imagen. (Im = Cd.)
- biyectiva: inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.
(de uno en uno)

Composición de funciones:

$f_\circ h(-1) = f(h(-1))$

$f^2(x) = f(f(x)) \qquad f^2(x) \neq (f(x))^2$

$(f_\circ h)(1) = f_\circ h(1) = f(h(1))$

Función Inversa

Sea $f: a \to b$ biyectiva, entonces existe $f^{-1}: b \to a$ que satisface:

$(f_\circ f^{-1})_{(x)} = (f^{-1}{}_\circ f)_{(x)} = id_{(x)}$ *Siempre recupero la identidad inicial.

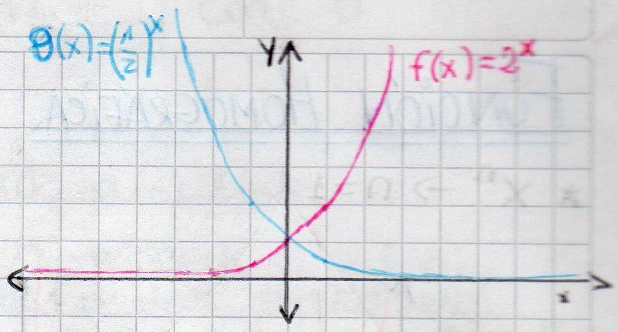
*Siempre f y f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y = x$

Función Exponencial

$F(x) = k \cdot a^x + q$

k: invierte, agranda.
q: corrimiento en y (asíntota en $y = q$)

$a > 0$ y $a \neq 1$.



*Su f^{-1} es la fc' logarítmica.

*g(x) y f(x) son simétricas porque $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Logaritmo.

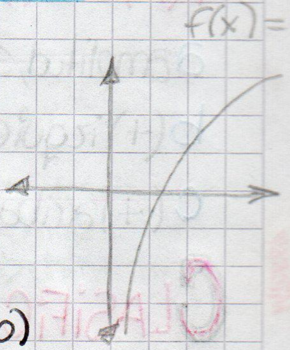
$\log_b x = n \iff x = b^n$

$b > 0$, $b \neq 1$
$x > 0$
$n \in \mathbb{R}$

- $\log_e = \ln$ neperiano / natural
- $\log_{10} = \log$ común / decimal
- $\log_2$ binario

Identidades logarítmicas:

- $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- $\log(a/b) = \log a - \log b$
- $\log(a^x) = x \log a$
- $\log(\sqrt[x]{y}) = \frac{\log y}{x}$



Cambio de base:

$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)} \Rightarrow$ si $k = x \Rightarrow \log_b(x) = \frac{1}{\log_x(b)}$

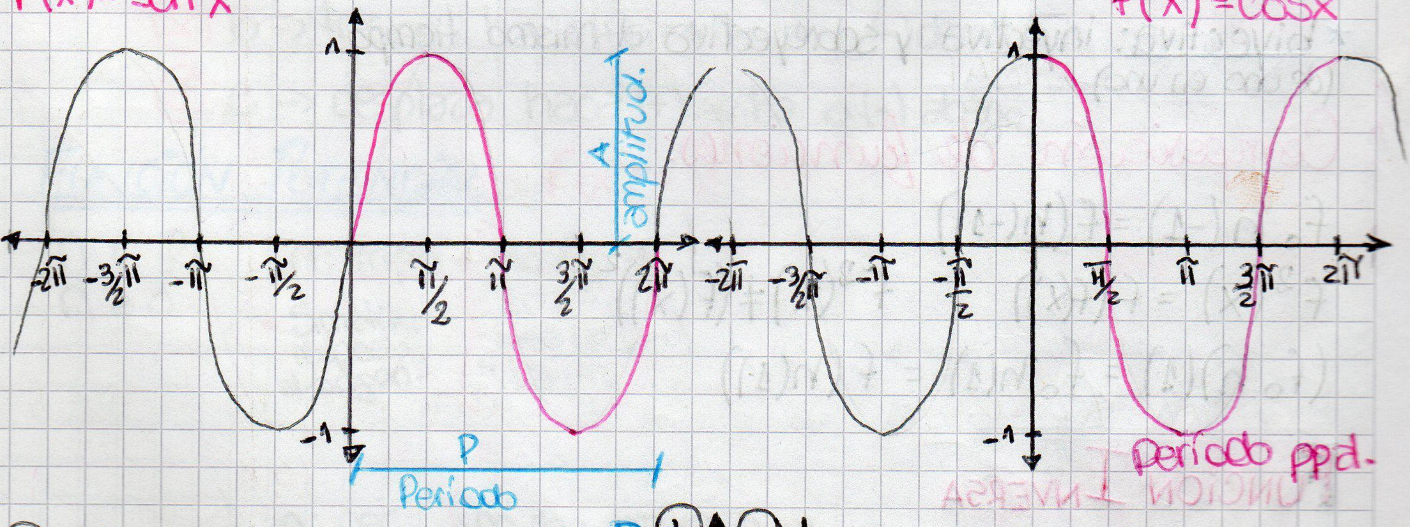
$e^{\ln a} = a$

Funciones Trigonométricas

Circulares

$f(x) = \text{sen}\, x$

$f(x) = \cos x$



Gráficos por corrimientos:

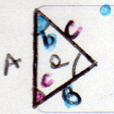
$F(x) = A(\text{sen}\, B \cdot x + C) + D$
↳ forma polinómica.

D ⊕ ↑ ⊖ ↓

A ⊖ invierte ‖ amplitud = a.

$\frac{C}{B}$ ⊖ → ⊕ ← en eje x $\xleftrightarrow{-c/b}$

B período $= \frac{2\pi}{B}$



• Teorema del Seno:

$$\frac{A}{\operatorname{sen} a} = \frac{B}{\operatorname{sen} b} = \frac{C}{\operatorname{sen} c}$$

• Teorema del coseno:

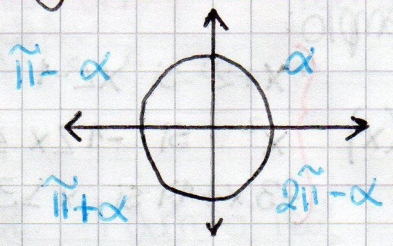
$$A^2 = B^2 + C^2 - 2B.C.\cos a$$

TABLA PARA ÁNGULOS PRINCIPALES.

	0°	30°	45°	60°	90°
α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen α	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

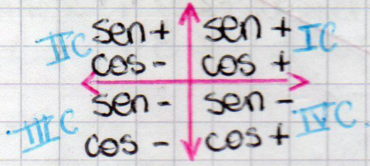
RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

Pasaje a dif. cuadrantes:



sen: valores de y.

cos: valores de x.



Otras fc's trigonométricas.

TANGENTE

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

SECANTE

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Dm: $\mathbb{R} - \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi.k \\ \frac{3}{2}\pi + 2\pi.k \end{cases}$

COTANGENTE

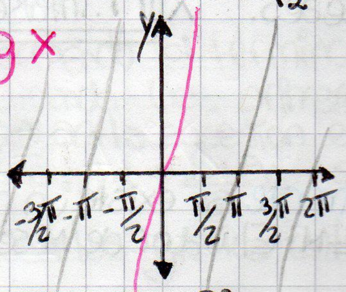
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

COSECANTE

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Dm: $\mathbb{R} \begin{cases} 0 + 2\pi.k \\ \pi + 2\pi.k \end{cases}$

$f(x) = \operatorname{tg} x$



$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$

$\operatorname{tg} x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ IDENTIDAD PITAGÓRICA.
2. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha . \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta . \cos\alpha$
3. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha . \operatorname{sen}\beta$

SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS.

4. $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha . \cos\alpha$
5. $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

DOBLE DE UN ÁNGULO.

6. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$
7. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

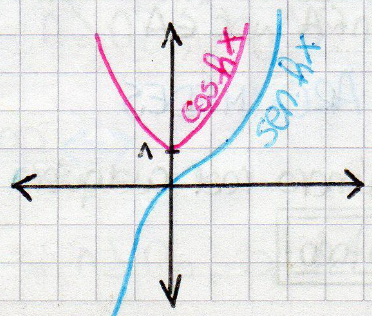
OPUESTO DE UN ÁNGULO.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

funciones trigonométricas hiperbólicas.

$$\cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

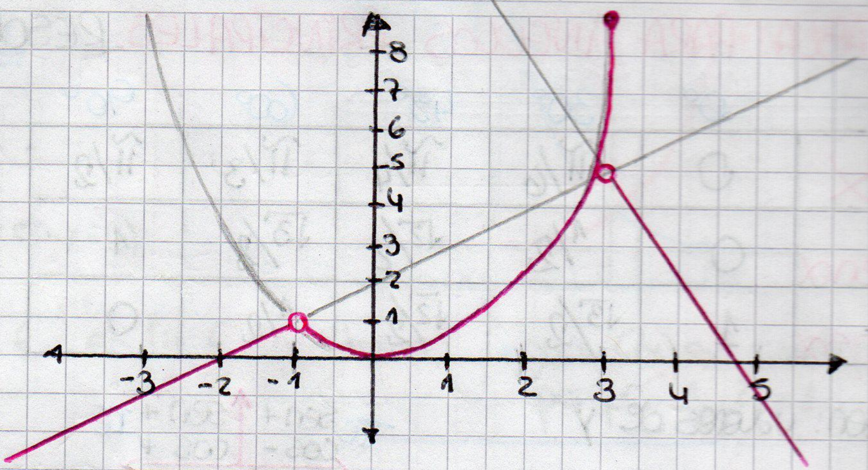
$$\operatorname{sen} h\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



Función Partida

Ejemplo:

$$f(x)\begin{cases} x+2 & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1<x\leq 3 \\ -3x+14 & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$



Números Reales

Conjuntos:

- Denso: Entre dos números del conjunto hay infinitos números: ej. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$
- Completo: Todo número puede ser asociado con la recta: Ej. $\mathbb{R}$.
- No completo: ej. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$.

Enteros Positivos: $\mathbb{N}$: Naturales *Cero *Enteros⁻ } $\mathbb{Z}$ enteros *Fraccionarios } $\mathbb{Q}$ Racionales *Irracionales } $\mathbb{R}$ Reales.

$\vee$ $\cup$: unión
$\wedge$ $\cap$: intersección

Definiciones:

$\boxed{\subset\text{: contenido.}}$

1. Un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ se dice acotado superiormente si existe un número real M tal que cualquiera sea $a\in A$ resulta que $a\leq M$. El valor de M se dice que es una cota superior de A.
2. Un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ se dice acotado inferiormente si existe un número real M tal que cualquiera sea $a\in A$ resulta que $a\geq M$. El valor M se dice que es una cota inferior de A.
3. Un conjunto $A\subset\mathbb{R}$ se dice acotado si, y solo si, lo está inferior y superiormente.
4. Sea $A\subset\mathbb{R}$ $(A\neq\emptyset)$ un conjunto acotado superiormente. Un número real s se dice supremo del conjunto A (notación: Sup(A)) si satisface:
   i) s es una cota superior de A.
   ii) si t es cota superior de A, entonces $t\geq s$.
5. Sea $A\subset\mathbb{R}$ $(A\neq\emptyset)$ un conjunto acotado inferiormente. Un número real s se dice ínfimo del conjunto A (notación: Inf(A)) si satisface:
   i) s es una cota inferior de A.
   ii) si t es cota inferior de A, entonces $t\leq s$
6. Sea $A\subset\mathbb{R}$, A acotado superiormente $(A\neq\emptyset)$. Entonces: C es máximo de A si, y solo si, $C=\operatorname{Sup}A$ y $C\in A$.
7. Sea $A\subset\mathbb{R}$, A acotado inferiormente $(A\neq\emptyset)$. Entonces: C es mínimo de A si, y solo si $C=\inf A$ y $C\in A$.

Principio de Arquímedes

Si R es un número real cualquiera $\Rightarrow \exists\, n\in\mathbb{N} / R<n$.

$\boxed{\forall\text{: Válido para todo}}$

ε: épsilon (número muy chico).

OTRA DEFINICIÓN DE SUPREMO.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $(A \neq \emptyset)$ un conjunto acotado superiormente. Un real s es el supremo de $A \iff$ verifica: $\cdot$ s es cota superior de A.
$\cdot \ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \ / \ s - \varepsilon < a$

OTRA DEFINICIÓN DE ÍNFIMO.

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $(A \neq \emptyset)$ un conjunto acotado inferiormente. Un número real i es el ínfimo de $A \iff$ verifica: $\cdot$ i es cota inferior de A.
$\cdot \ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \ / \ i + \varepsilon > a$

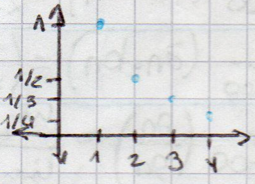
SUCESIONES

Llamaremos sucesión de números reales a la función $a(n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Notaremos como $a(n) = a_n$ ó bien $(a_n)_{n \geq 1}$

ej: $a_n = 2n+3$ $\quad a_1 = 5 \quad a_2 = 7 \quad a_3 = 9 \quad a_4 = 11$
Término general. · Cada elemento de la sucesión se denomina término.

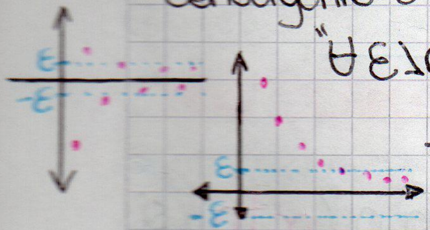
FORMAS DE EXPRESAR UNA SUCESIÓN.

1. Informando el término general. Por ej: $b_n = (-1)^n \cdot 5$
2. Indicando los primeros términos. Por ej: $C_n = \{-5; 5; -5; 5\}$
3. Expresar la sucesión en forma recurrente. Por ej: $a_{n+1} = \dfrac{2 + a_n}{a_n}$ siendo $a_1 = 3$ * Son difíciles de ver indicando los primeros términos.
4. Expresarlas gráficamente. Por ej: $a_n = \dfrac{1}{n}$



LÍMITE DE UNA SUCESIÓN.

CONVERGENTE: Se dice que una sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$ tiene límite l o es convergente a l si cumple la siguiente propiedad:

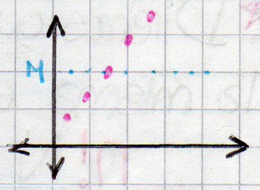


"$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se verifica que $|a_n - l| < \varepsilon$"
* Todos los puntos entran en el intervalo de $(\varepsilon; -\varepsilon)$, es decir:
$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

DIVERGENTE A $+\infty$ $\quad \lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty \iff$

no tiene cota superior.

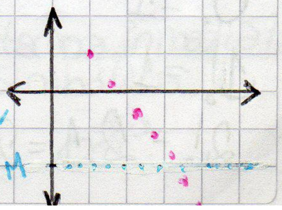
"$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $b_n > M$"



DIVERGENTE A $-\infty$ $\quad \lim_{x \to +\infty} b_n = -\infty \iff$

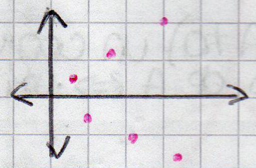
no tiene cota inferior.

"$\forall M < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $b_n < M$"

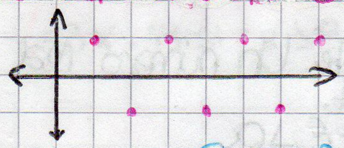


DIVERGENTE A ∞ (a secas). Son sucesiones oscilantes cuyo límite tiende a $+\infty$ y $-\infty$ a la vez.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \iff \lim_{x\to+\infty} |a_n| = +\infty$$



NO CONVERGENTE. Sucesión oscilante que carece de límite.



SUCESIONES:
- Convergentes (límite es finito).
- Divergente: $+\infty$, $-\infty$, ∞
- No convergentes (oscilantes que carecen de lim)

Propiedades y Teoremas relacionados al concepto de límite.

1. Unicidad del límite. Si una sucesión es convergente, su límite es único.
2. Acotación de sucesiones convergentes. Si a_n es una sucesión convergente, entonces está acotado, es decir: $\exists M > 0$ tal que $|a_n| < M \ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Conservación del signo:
Si $\underbrace{\lim_{x\to+\infty} a_n = \lim}_{\text{si es convergente}}$ y $\underbrace{\lim > 0 \Rightarrow a_n > 0}_{\text{el lim es positivo} \Rightarrow \text{es positivo}}$ (para casi todo n).
4. Álgebra de los límites:
Sean a_n y b_n sucesiones convergentes con $\lim_1$ y $\lim_2$ respect.

1. $\lim_{x\to+\infty} (a_n+b_n) = \lim_{x\to+\infty} a_n + \lim_{x\to+\infty} b_n = \lim_1 + \lim_2$
2. $\lim_{x\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{x\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{x\to+\infty} b_n\right) = \lim_1 \cdot \lim_2$
3. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{x\to+\infty} a_n}{\lim_{x\to+\infty} b_n} = \frac{\lim_1}{\lim_2}$ (si $\lim_2 \neq 0$). $\lim \ln a = \ln \lim a$
4. $\lim_{x\to+\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} a_n\right) = k \cdot \lim_1$ (con $k \in \mathbb{R}$).
5. $\lim_{x\to+\infty} |a_n| = \left|\lim_{x\to+\infty} a_n\right| = |\lim_1|$
6. $\lim_{x\to+\infty} (a_n)^k = \left(\lim_{x\to+\infty} a_n\right)^k = \lim_1{}^k$ (si $\lim_1 > 0$)

★ Diremos que una propiedad es válida para casi todo n (pctn) si la misma es válida desde un n natural en adelante.

$n!$ N factorial: (solo para $\mathbb{N}$ y 0).

$0! = 1$ $\quad$ $3! = 3.2.1 = 6$

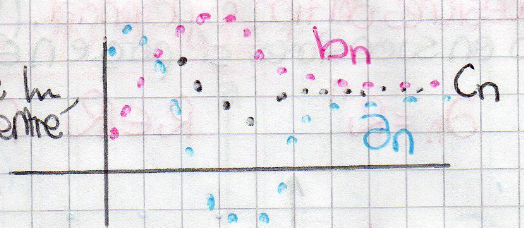
$1! = 1$ $\quad$ $4! = 4.3.2.1 = 24$ $\quad$ $n! = n.(n-1)(n-2)\ldots 2.1$

$2! = 2.1 = 2$ $\quad$ $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ $\quad$ $\boxed{(n+1)! = (n+1).n!}$ Prop de factorial.

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	Límite Conocido.

Propiedad de intercalación (o sandwich).

Si dos sucesiones convergen al mismo límite l, entonces, cualquier sucesión comprendida entre ellas también converge a l.



Es decir:

"Si $a_n \leq C_n \leq b_n$ pctn y $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} C_n = l$

Propiedades:

① De la sucesión minorante: Sean a_n y b_n dos sucesiones tales que pctn $a_n < b_n$ y $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

② De la sucesión mayorante. Sean a_n y b_n dos sucesiones tales que pctn $a_n < b_n$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

③ Propiedad de cero por acotado: Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ y b_n es una sucesión acotada.
$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (a_n . b_n) = 0$

TIP: $\frac{P}{Q}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2}{2n^2+5n} = \frac{3}{2}$ si gr P = gr Q $\frac{a}{b}$ *válido solo para potencias $\in \mathbb{N}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-3}{n^2-1} = +\infty$ si gr P > gr Q $\pm\infty$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n^3-n} = 0$ si gr P < gr Q 0

No son indeterminaciones:

• $(+\infty).(+\infty) = +\infty$ • $(-\infty).(-\infty) = +\infty$ • $(-\infty).(+\infty) = -\infty$

En cambio, división y resta de infinitos son indeterminaciones.

$(\to 0)^{\to 0}$: indeterminación.

$\frac{n}{0} = \infty$	$\frac{n}{\infty} = 0$

MÁS CLARO: Indeterminaciones:

*El álgebra de los límites puede extenderse, en algunos casos, a límites que no sean finitos:

$\ln(\to 0^+) = -\infty$

$(+\infty) + (+\infty) \to +\infty$ $\quad \frac{\infty}{0} \to \infty$ $\quad (+\infty)^{+\infty} \to +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) \to -\infty$ $\quad \frac{0}{\infty} \to 0$ $\quad 0^{+\infty} \to 0$

$\infty . \infty \to \infty$

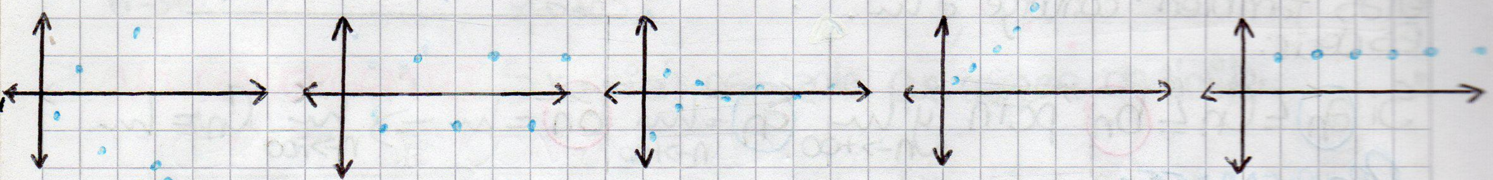
*Cuando no se puede aplicar el álgebra de los límites de forma inmediata se presenta una indeterminación que expresamos en forma simbólica.

$(+\infty) - \infty$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{0}{0}$ $\quad 0^0$ $\quad 1^\infty$ $\quad \infty^0$

$0 . \infty$

Sucesiones del tipo exponencial. (Para fc' exponencial no existe una base negativa, pero en sucesiones sí porque $n \in \mathbb{N}$).

$a_n = R^n \quad R \in \mathbb{R} \quad R$: Base.



$a_n = (-3)^n \ \infty \qquad b_n = (-1)^n \ \nexists \qquad c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \ 0 \qquad d_n = 2^n \ +\infty \qquad e_n = 1^n \ 1$

En general:

$$\lim_{n \to +\infty} R^n = \begin{cases} 1 & \text{si } R = 1 \\ \nexists & \text{si } R = -1 \\ +\infty & \text{si } R > 1 \\ \infty & \text{si } R < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < R < 1 \end{cases}$$

Observación: Algunos de estos resultados para R^n pueden generalizarse, pero no se puede aplicar lo anterior cuando la base es una sucesión que tiende a 1 o -1.

UN LÍMITE IMPORTANTE: Para resolver indeterminaciones del tipo 1^∞

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; en grl: $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ (Si a_n es una sucesión que tiende a ∞.)

CRITERIO DE D'ALEMBERT.

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que exista $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces:

si $|L| < 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$; si $|L| > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$ (si $|L| = 1$ no sirve).

CRITERIO DE CAUCHY. (o de la raíz)

Si a_n es una sucesión de términos positivos, tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

*Este criterio también es válido si $L = +\infty$.

SUBSUCESIONES

Dada una sucesión $\{a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_k; \dots\}$, una subsucesión de a_n es una sucesión de la forma: $\{a_{n_1}; a_{n_2}; a_{n_3}; a_{n_4}; \dots; a_{n_k}; \dots\}$ con la condición: $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots < n_k < \dots$

Teorema:

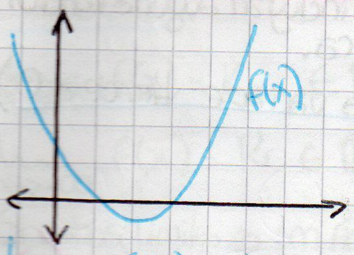
Si una sucesión a_n converge a L, entonces toda subsucesión de a_n es convergente a L. (válido también para divergente a $+\infty$ o a $-\infty$).

- Si $a_n \to L \Rightarrow$ toda $a_{n_k} \to L$

Contrarecíproco: Si existen dos a_{n_k} que tienden a distintos $L \Rightarrow$ no existe $\lim a_n$.

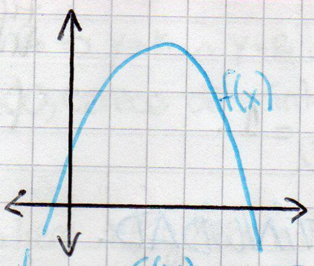
$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$$

LÍMITE DE FUNCIONES Y CONTINUIDAD.



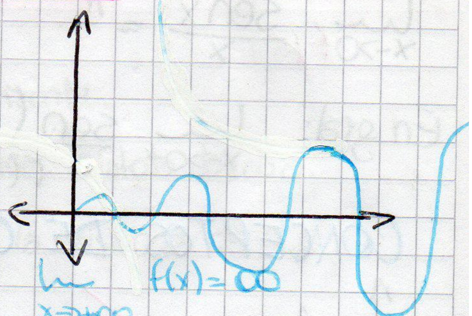
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

"$\forall n > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R} / x > x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > n$"

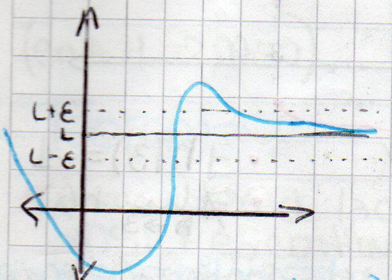


$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

"$\forall n > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R} / x < x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < n$"

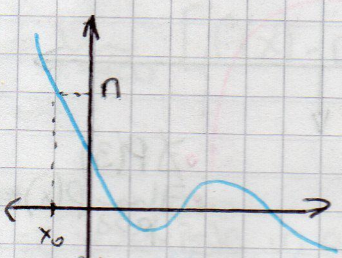


$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$



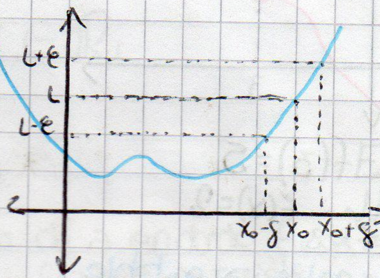
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R})$

"$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R} / x > x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$"



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

"$\forall n > 0 \in \mathbb{R} / x < x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) > n$"

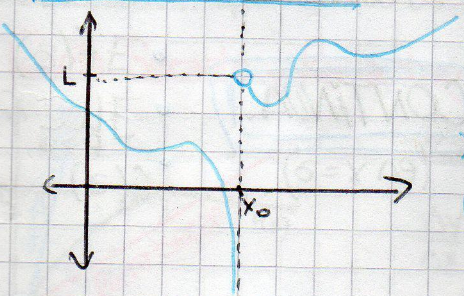


$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$

• "$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon): x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$"

• "$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$"

LÍMITE LATERAL:



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to x_0} f(x).$$

"$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$"

• Sirven los criterios de: 0 x acotada / Prop. Sandwich / Minorante - Mayorante.

Otra indeterminación de e:

$e = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow$ Para indeterminaciones 1^∞ (solo si el $\lim x \to \pm\infty$)

$e = \lim_{y\to 0} (1 + y)^{1/y} \Rightarrow 1^\infty$

En gral:

$e = \lim_{x\to a} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$ si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

$e = \lim_{x\to a} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

$$\lim_{f(x)\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{\frac{1}{f(x)}} = \boxed{1} \Rightarrow \text{Por cambio de variable.}$$

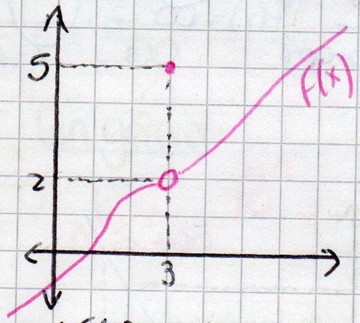
Límite trigonométrico.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

En grál: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1.$

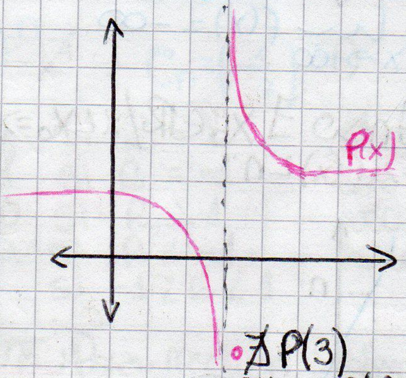
- Para salvar indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ que incluyan alguna función trigonométrica.
(sólo si la variable tiende a 0)

CONCEPTOS DE CONTINUIDAD.



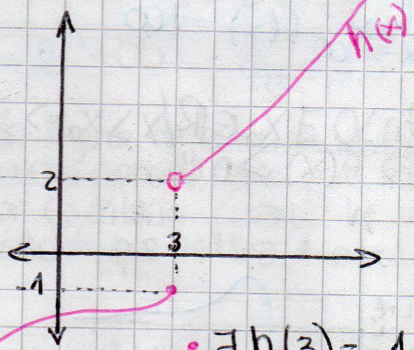
- $\exists f(3) = 5$
- $\exists \lim_{f\to 3} f(x) = 2$

discontinua evitable.



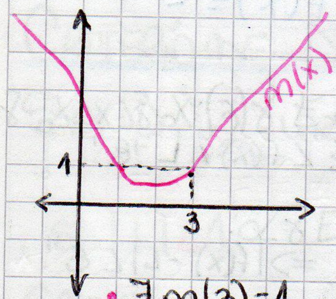
- $\nexists P(3)$
- $\exists \lim_{p\to 3} P(x) = \infty$

discontinua esencial.



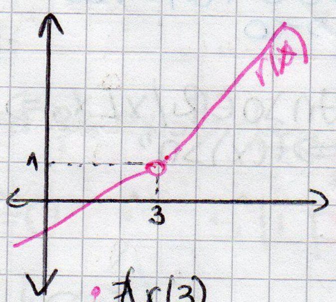
- $\exists h(3) = -1$
- $\nexists \lim_{h\to 3} h(x)$

discontinua esencial.



- $\exists m(3) = 1$
- $\exists \lim_{m\to 3} m(x) = 1$

continua



- $\nexists r(3)$
- $\exists \lim_{r\to 3} r(x) = 1.$

discontinua evitable

$\boxed{\text{DISCONTINUA}}$
- $\exists \lim = \infty$ } es
- $\nexists \lim$ } es
- $\exists \lim = n$ } ev.

$\boxed{\text{CONTINUA.}}$ (en $x=a$)
- $\exists f(a)$
- $\exists \lim_{f\to a} f(x) \in \mathbb{R}$
- $f(a) = \lim_{f\to a} f(x)$

PROPIEDAD DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas, entonces: $f+g$; $f-g$ y $f\circ g$ son funciones continuas en $x=a$.
2. Si $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ también es continua en $x=a$.
3. Si $g(x)$ es continua en $x=a$ y $f(x)$ es continua en $g(a) \Rightarrow f\circ g$ es continua en $x=a$.
4. Toda función polinómica es continua en $\mathbb{R}$. Una función racional (cociente de funciones polinómicas) es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de cero.

ASÍNTOTAS.

Asíntota Vertical
- Hallar el Dm de $f(x)$: $\mathbb{R} - \{a; b; \ldots\}$
- Calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ $\to \in \mathbb{R}$; $\to \infty \to$ tiene asíntota vertical en

ASÍNTOTA HORIZONTAL

• Calcular:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = K \in \mathbb{R}$ — si da $\mathbb{R} \Rightarrow y = K \wedge y = R$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = R \in \mathbb{R}$ — si da ∞, carece de asíntota horizontal.
$\Downarrow$
Ver si tiene asíntota oblicua.

• Si ambos límites no son finitos, $f(x)$ no tiene A.H y debe estudiarse la existencia de A.O.

ASÍNTOTA OBLICUA

Si $y = mx + b$ es A.O. $\Leftrightarrow m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \cdot f(x) \in \mathbb{R}$

(en A.H. $\to m = 0$). $\quad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - m.x] \in \mathbb{R}$

Teoremas.

• Consecuencias de la continuidad en un punto:

1. Si f es continua en $x = a \Rightarrow$ existe un entorno de a en donde f está acotada.
2. Conservación del signo: si f es continua en $x = a$ y $f(a) \neq 0 \Rightarrow$ existe un entorno de a en el cual f tiene el mismo signo que $f(a)$.

• Continuidad en un intervalo:

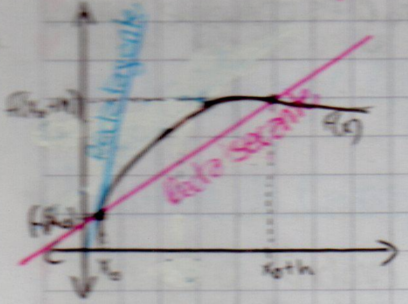
• Teorema de Bolzano: Si f es continua en $[a,b]$ y satisface $f(a) > 0$ y $f(b) < 0 \Rightarrow$
$\exists\, c \in (a,b) / f(c) = 0$

• Teorema de los valores intermedios: Sea f una función continua en $[a,b] / f(a) < f(b)$.
Si K es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b) / f(c) = K$

APLICACIONES: aproximación de la raíz, existencia de soluciones, cálculo de C^+ y C^-.

Recta Secante y Recta tangente.

DERIVADAS



* Razón media de cambio / Cociente incremental

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Cuando $h \to 0$: la pendiente de la recta secante tiende al valor de la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0.

Pendiente de la recta tangente	$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$	$=$ Derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0: $f'(x_0)$

* Si $f(x)$ es discontinua en $x_0 \Rightarrow f(x)$ no es derivable en x_0.

Teorema: * Si $f(x)$ es una función derivable en $x_0 \Rightarrow$ es continua en x_0.

ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A x_0 EN EL PUNTO $x = x_0$.

1. Conocemos $f'(x_0) = m$.
2. Conocemos el punto de tangencia: $(x_0; f(x_0))$
3. Encontrar **b** reemplazando: $f(x_0) = f'(x_0).x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0).x_0$
4. Dar la respuesta: $y = f'(x_0).x + f(x_0) - f'(x_0).x_0 \Rightarrow y = f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0)$

FUNCIÓN DERIVADA: Es una función que entrega el valor de la pendiente de la recta tangente en el dominio x_0.

TABLA DE DERIVADAS

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$k,\ k\in\mathbb{R}$	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$ax+b$	a	$\operatorname{sen} h\, x$	$\cos h x$
x^2	$2x$	$\cos h\, x$	$\operatorname{sen} h x$
x^3	$3x^2$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^n	$n x^{n-1}$	$\operatorname{arc\,sen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\sec x$	$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \sec x$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	n^x	$n^x \cdot \ln n$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$ o $1+\operatorname{tg}^2 x$	e^{ax}	$a e^{ax}$ $a\in\mathbb{R}$

$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$

Operaciones de las derivadas

- $(f\pm g)' = f' \pm g'$ ‖ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ ‖ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $(g \neq 0)$

★ **REGLA DE LA CADENA:** ★

Si g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y se verifica que: $(f \circ g)'_{(x_0)} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

★ **DERIVADA LOGARÍTMICA** ★ Sea $f(x) = g(x)^{h(x)}$

① Aplicar logaritmo: $\ln f(x) = \ln\left(g(x)^{h(x)}\right)$

$\ln f(x) = h(x) \cdot \ln g(x)$

② Aplicar derivada: $(\ln f(x))' = (h(x) \cdot \ln g(x))'$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot (\ln g(x))'$

$$\boxed{f'(x) = \left[h'(x) \cdot \ln g(x) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)}\right] \cdot g(x)^{h(x)}}$$

(si f es continua y monótona $\Rightarrow$ f es biyectiva).

$\Rightarrow$ Justifico que es biyectiva = justifico que tiene inversa.

- Teorema de la función inversa:

Si $f(x)$ es derivable en $x=a$ y $f(a)=b \Rightarrow f^{-1}(x)$ es derivable en b y, además:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

TEOREMAS:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b):

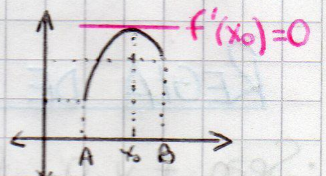
I Si $f'(x)>0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en $[a,b]$

II Si $f'(x)<0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$

Derivadas sucesivas: $f(x) \rightarrow \underset{1}{f'(x)} \rightarrow \underset{2}{f''(x)} \rightarrow \underset{3}{f'''(x) = f^{(3)}(x) = f^{III}(x)} \rightarrow \underset{n}{f^{n}(x)}$

ORDEN: 1 2 3 n

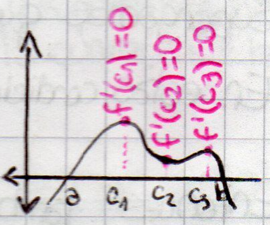
* Teorema de Fermat:



- Si f está definida en el intervalo abierto (a,b).
- Si $x_0 \in (a,b)$ y es un extremo de f (un máximo o mínimo).
- Si f es derivable en x_0

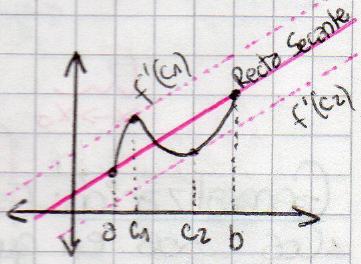
$\Rightarrow f'(x_0)=0$

* Teorema de Rolle:



- Si f es continua en $[a,b]$
- Si f es derivable en (a,b) $\Rightarrow \exists c \in (a,b) / f'(c)=0$
- Si $f(a)=f(b)$

* Teorema de Lagrange o Teorema del valor medio.



- Si f es continua en $[a,b]$
- Si f es derivable en (a,b)

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) / \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

* Teorema de Cauchy.

- Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$
- Sean f y g derivables en (a,b)

$\Rightarrow \boxed{\exists c \in (a,b) / [f(b)-f(a)] \cdot g'(c) = [g(b)-g(a)] \cdot f'(c)}$

- En el caso que $g'(c) \neq 0$, $g(b) \neq g(a) \Rightarrow \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$

PROPOSICIÓN (I)

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$ entonces f es constante en $[a,b]$ $(f(x)=k, k \in \mathbb{R})$

Corolario.

Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) y además se verifica que $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a,b)$ entonces f y g difieren de una constante, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ talque: $f(x) = g(x) + k$

PROPOSICIÓN (II)

- Sea f una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

(i) Si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $[a,b]$ y en $x=a$ hay un mínimo y en $x=b$ se alcanza un máximo.

(ii) Si $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $[a,b]$ y en $x=a$ se alcanza un máximo y en $x=b$ un mínimo.

REGLA DE L'HOSPITAL

- Sean f y g funciones definidas y derivables en el intervalo (a,b). Para $x_0 \in (a,b)$ supongamos que $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ excepto en $x = x_0$ y además, Supongamos que $f(x_0) = g(x_0) = 0$
- En estas condiciones, si existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ y es finito,
- Entonces también existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y se verifica que:

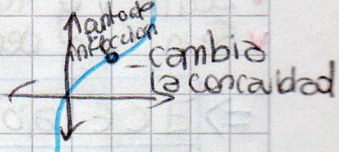
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Generalización: Esta regla es también válida para indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, y para los casos en que el límite sea $\pm\infty$ y $x \to x_0$ o $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$

*Análisis de la concavidad.

$\cap$ convexa $\cup$ cóncava.

- Si $f''(x) > 0$ en $(a,b) \Rightarrow f(x)$ es cóncava en (a,b)
- Si $f''(x) < 0$ en $(a,b) \Rightarrow f(x)$ es convexa en (a,b)
- Si $f''(x) = 0 \Rightarrow x_0$ es un posible punto de inflección.



POLINOMIO DE TAYLOR $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

La fórmula de Taylor permite aproximar funciones, que no son polinomios, mediante el Polinomio de Taylor correspondiente. La aproximación es más precisa cuanto mayor sea el grado del polinomio.
El término complementario, o Resto de Taylor, permite estimar la aproximación obtenida ya que es la diferencia entre el valor de la función en el punto considerado y el polinomio.

Sea $f(x)$ una función con $(n+1)$ derivadas sucesivas finitas en $x=a$, llamamos Polinomio de Taylor de orden n, al polinomio determinado por:

$$\boxed{P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n}$$

Donde: $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$

Denominamos Resto de Taylor a:

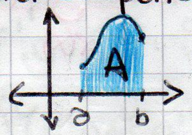
$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}}$$ donde c es un valor entre a y x.

El error que se comete es una aproximación de una función al reemplazarla por su Polinomio de Taylor es:

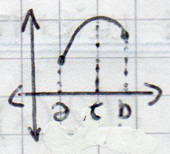
$$\boxed{\varepsilon = |R_n(x)|} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon = |f(x) - P_n(x)|}$$

INTEGRALES

Integrales definidas: Sea f una función que diremos integrable, y supondremos inicialmente que $f \geq 0$ nos propondremos pensar el cálculo del área bajo la curva (entre la curva y el eje x).



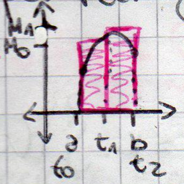
A: área total verdadera.



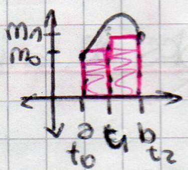
• Tomamos una partición del intervalo $[a;b]$

- Aproximamos por rectángulos:

Por exceso:



Por defecto:



$S = M_0(t_1-t_0) + M_1.(t_2-t_1) + M_2(t_3-t_2)$ $\quad s = m_0.(t_1-t_0) + m_1.(t_2-t_1) + m_2(t_3-t_2)$

$$s \leq A \leq S$$

• Tomando una partición mayor, se mejora la aproximación.

$$s_1 \leq s_2 \leq A \leq S_2 \leq S_1$$

* Se observa que esta secuencia sigue este comportamiento con solo tomar particiones más finas. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_2 = A$; $\lim\limits_{n\to+\infty} S_2 = A$

En el caso límite se cumple que:

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = A = \int_a^b f(t)\,dt$ (integral entre a y b de $f(t)$ diferencial t).

*$f(t)$: integrando

*La interpretación inicial de integral es el cálculo del área bajo la curva.

Teorema Fundamental del Cálculo Integral (derivada de una fc' integral)

Si f es integrable sobre $[a,b]$, entonces la función $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es uniformemente continua en $[a,b]$, derivable en $(a;b)$ y se cumple: $F'(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$

En general: Sea $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN INTEGRAL COMPUESTA: $(F'(x))$

$$\boxed{\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)}$$

- $F(x)$ se obtiene de la composición de una fc':

$R(x)=\int_a^x f(t)\,dt$; $g(x)$

- Fc' integral

$$F'(x)=(R(g(x)))' = \underbrace{R'(g(x))}_{\text{TFCI.}}\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x).$$

* $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$ * $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = \int_{\alpha(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt$ $(\alpha(x)\le c\le \beta(x))$

FÓRMULA DE LEIBNITZ:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x).$$

Propiedades de la integral definida:

* $\int_a^a f(t)\,dt=0$

* $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx.$

* $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $(a\le c\le b)$

* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

* $\int_a^b f(x)\,dx \le f(x_{max})(b-a)$

Concepto de Primitiva

* Encontrar $f(x)$ teniendo $f'(x)$. Es decir: $\int f'(x)\,dx = f(x)$ integral indefinida.

Integrales Indefinidas

Propiedades de integrabilidad

① $\int f\pm g\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$ ② $\int k\cdot f\,dx = k\cdot\int f\,dx$ (Con $k\in\mathbb{R}$)

TABLA DE PRIMITIVAS

- $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
- $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int k \, dx = kx + C$
- $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + C$

Métodos de integración

Método de sustitución:

- Cambio de variable: cambiando la variable, el diferencial y los parámetros (si es definida)

Método de integración por partes:

- Sabemos que: $(f.g)' = f'.g + f.g'$ Si integro m.a.m. se mantiene la igualdad:

$$\int (f.g)' dx = \int (f'.g + f.g') dx$$

TFCI

$$f.g = \int (f'.g) dx + \int (f.g') dx$$

$$\int (f.g') \, dx = f.g - \int (f'.g) \, dx \quad \Big\| \quad \int_a^b (f.g') dx = f.g\Big|_a^b - \int_a^b f'.g \, dx$$

Método de fracciones simples:

- Para cocientes de polinomios (cuando no se puede dividir) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si $gr(P(x)) < gr(Q(x))$ y el denominador $(Q(x))$ se puede factorizar

ej: $Q(x) = (x+w)(x+u)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+w)} + \frac{B}{(x+u)} = \frac{(x+u)A + (x+w)B}{(x+w)(x+u)} \Rightarrow P(x) = A.(x+u) + B(x-u)$$

$$\boxed{\int P(x) dx = \int A(x+u) dx + \int B(x-u) dx}$$

REGLA DE BARROW

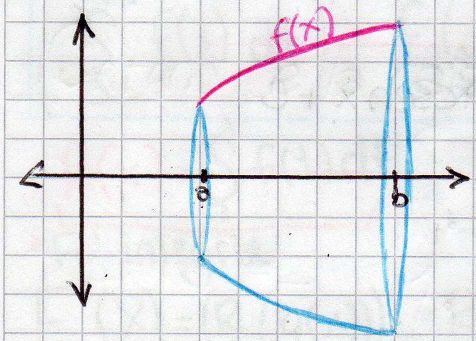
Sea $f: [a,b]$ una función continua y sea $g(x)$ una función tal que $g'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$ (g es una primitiva de f), entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a)}$$

OBSERVACIONES

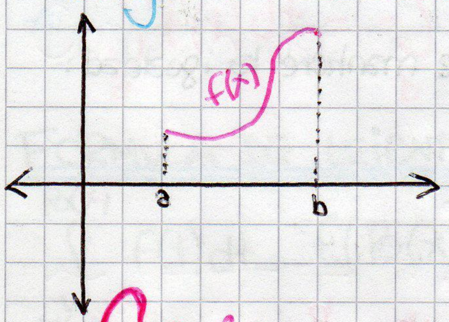
- Los resultados de una integral definida es un real $\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)' = 0$
- Los valores pueden ser positivos, negativos o cero, $\therefore$ no siempre el cálculo de una integral definida informa el área bajo la curva.
- Cuando buscamos primitivas, en realidad, tenemos infinitas. Pero el valor de la constante se anula al hacer la regla de Barrow, por eso tomamos la primitiva $K=0$.

Volumen de un sólido en revolución (respecto eje x).



$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Longitud de arco de una curva.



$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Series

- Teniendo una sucesión a_n se busca armar otra sucesión: "Sucesión de sumas parciales" (S_n). $\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$
- Si fuese posible conseguir el término general de la sucesión de sumas parciales podría conocerse el resultado de la suma de los infinitos términos de la sucesión a_n.
- Nos interesa ahora sumar los infinitos términos de una sucesión:

$$\text{serie} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Conceptos previos de sumatoria:

- $\sum_{i=1}^{n} K = K \cdot n$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$

Convergencia de una serie.

Una serie $\sum_{k=1}^{n} a_k$ se dice convergente si $\lim_{n\to+\infty} S_n = C (\in \mathbb{R})$, siendo:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (sucesión de sumas parciales).

Divergencia de una serie

Si la sucesión de sumas parciales S_n carece de límite o es divergente, entonces, diremos que:

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ es divergente. $\begin{cases} \bullet \lim S_n = \pm\infty \text{ divergente.} \\ \bullet \nexists \lim S_n \text{ no convergente.} \end{cases}$

Condición necesaria.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Si la serie es convergente, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} a_n$
- $\nexists$ _ Serie no convergente.
- $\exists \lim \neq 0$ _ Serie divergente.
- $\exists \lim = 0$ _ No me indica nada.

Series geométricas.

Una serie se dice geométrica si es de la forma

$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n$ q: razón de la serie geométrica.

- Podemos buscar la sucesión de sumas parciales:

$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} q^i = \boxed{\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ → Término general de las sucesiones de sumas parciales de una serie geométrica.

- Si tengo la serie geométrica $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot q^n}$

- Si $|q| < 1$, la serie es convergente a: $\boxed{\dfrac{a}{1-q}}$

- En caso contrario, es divergente.

Series telescópicas.

Una serie se denomina telescópica cuando es de alguna de las siguientes formas:

I $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k - b_{k+1}$ II $\sum_{k=1}^{+\infty} b_{k+1} - b_k$ $\Big\}$ el término general es la diferencia de dos términos consecutivos.

Al tener una serie telescópica es más simple escribir S_n.

Criterios de comparación

I Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ son dos series que verifican $a_n \leq b_n$ pctn.

y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente también.

II Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ son dos series que verifican $a_n \geq d_n$ pctn

y $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ es divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente también.

Criterio de la raiz (Cauchy).

Si a_n es una sucesión de términos positivos/

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

- Si $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.
- Si $L = 1 \Rightarrow$ Este criterio no da información.

Criterio del cociente (D'Alembert)

Si a_n es una sucesión de términos positivos/

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

- Si $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es divergente.
- Si $L = 1 \Rightarrow$ Este criterio no da información.

Series P

Se denomina así a las series de forma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (con $p \in \mathbb{R}$)

Se clasifican según su convergencia:

- La serie es convergente si $p > 1$
- La serie es divergente si $p \leq 1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ "serie armónica"

Criterios de comparación: (por medio de cocientes)

III Sean a_n y c_n dos términos generales de series de términos positivos:

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = L \, (\in \mathbb{R})$, $L \geq 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente también.

IV) Sean a_n y d_n dos términos generales de series de términos positivos:

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ es divergente y $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{d_n} = L$ (con $L>0$ o $L=+\infty$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es también divergente.

CRITERIO INTEGRAL DE CAUCHY

Si a_n es una sucesión de términos positivos no crecientes (es decir decreciente; monótona o no); y además, existe una función continua $f(x)$ tal que $f(n)=a_n$. Entonces, si la integral impropia (porque un extremo es ∞):

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$
- Toma un valor finito, la serie es convergente.
- Es ∞, la serie es divergente.

Series Alternadas

Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n = -a_{n_1} + a_{n_2} - a_{n_3} + a_{n_4}$

Con $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ se llama serie alternada.

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ "serie armónica alternada".

Mickey

Criterio de Leibnitz

Si $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$ es una serie alternada que verifica:

i) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ ii) a_n es decreciente ($a_{n+1} \leq a_n$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$ es convergente.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es alternada, además de analizar la convergencia de ésta, podemos analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ que resulta ser una serie de términos positivos.

1) Como siempre se cumple que $b_n \leq |b_n|$, si $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ es convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge también.

En este caso, decimos que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

2) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, pero $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ diverge, decimos que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ CONVERGE CONDICIONALMENTE.